Curve differenziabili in $\mathbb{R}^3$

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 23 aprile 2020, durata 2 ore

Indice

Ambiente $\mathbb{R}^3$ e regolarità $\mathcal{C}^\infty$

Questo file approfondisce alcuni aspetti della teoria delle curve differenziabili in $\mathbb{R}^3$, trattati nella prima e nell'inizio della seconda video-lezione del Prof. C. Arezzo.

Il file approfondisce anche alcuni argomenti del *Fascicolo 1: Curve in* $\mathbb{R}^n$, Appunti di Analisi II (Prof.sse A. Garroni e A. Malusa).

Raccomando, almeno per la prima parte di questo file, di tenere sotto gli occhi tale *Fascicolo 1*, che contiene anche vari esempi e figure, ora molto utili.

In queste note (coerentemente con le scelte fatte nelle lezioni del Prof. Arezzo) assumeremo:

- che lo spazio ambiente sia $\mathbb{R}^3$
- che la regolarità delle funzioni e equazioni parametriche sia di classe $\mathcal{C}^\infty$

Nelle altre trattazioni che siamo usando, osseviamo che:

- Nel *Fascicolo 1* di Analisi II, lo spazio ambiente è $\mathbb{R}^n$.
  In Sernesi, paragrafi 30 e 31 lo spazio ambiente è $\mathbb{R}^n$; poi nel paragrafo 32 è $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.
  In Abate - Tovena, Capitolo 1, è (secondo gli argomenti) $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^3$.
- Nel *Fascicolo 1* di Analisi II, la regolarità è generalmente di classe $\mathcal{C}^1$.
  In Sernesi è di classe $\mathcal{C}^\infty$.
  In Abate - Tovena è di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

In Geometria differenziale, differenziabile significa di classe $\mathcal{C}^\infty$

Curve parametrizzate

Definizione. Una *curva differenziabile* di $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ (ovvero differenziabile) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dove I è un intervallo della retta euclidea $\mathbb{R}$. Dunque, se t è l'ascissa su I, la terna:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

di funzioni differenziabili $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ sono le *equazioni parametriche* della curva α.

Definizione. Se $t_0 \in I$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, il vettore

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

si dice *vettore tangente* o *vettore velocità* della curva α nel punto P_0. Se $\alpha'(t_0) \neq \mathbf{0}$ (vettore nullo), è definita la *retta tangente* alla curva α in P_0, e le sue equazioni parametriche sono

$$x = x_0 + x'(t_0)t, \quad y = y_0 + y'(t_0)t, \quad z = z_0 + z'(t_0)t.$$

Diffeomorismi

È possibile, e spesso utile, *riparametrizzare*.

Definizione. Una funzione $f : J \to I$, $t = f(\tau)$, tra intervalli $J, I \subset \mathbb{R}$ si dice un *diffeomorfismo* se f è $\mathbb{C}^\infty$, biunivoca e tale che l'inversa insiemistica $\tau = f^{-1}(t)$ è anch'essa $\mathcal{C}^\infty$. Esempi di diffeomorfismi sono

- $y = mx$ con $m \neq 0$ e $J = I = \mathbb{R}$, con inversa $x = m^{-1}y$;
- $y = e^x$ con $J = \mathbb{R}$ e $I = (0, +\infty)$, con inversa $x = \log y$;
- $y = \tan x$ con $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $I = \mathbb{R}$, con inversa $x = \arctan y$.

Non è invece un diffeomorfismo $y = x^3$, applicazione $\mathcal{C}^\infty$ e biunivoca da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, ma tale che l'inversa $x = y^{\frac{1}{3}}$ non è derivabile per $y = 0$.

Definizione. Una curva differenziabile $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ si dice *regolare* se per ogni $t_0 \in I$ il vettore tangente è non nullo: $\alpha'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Ne segue che, se $\alpha(t)$ è una curva regolare, e se $t = f(\tau)$ è un diffeomorfismo, la riparametrizzazione $\alpha(f(\tau))$ è ancora una curva regolare.

Poligonali e lunghezze

Il risultato più importante sulle curve differenziabili è la loro *rettificabilità*. Ciò è espresso dal seguente

Teorema. Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile, e per ogni partizione $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ dell'intervallo $[a, b]$, diciamo *ampiezza* di P il numero reale positivo $\|P\| = \max_{1\leq j\leq k}(t_j - t_{j-1})$. Osserviamo che ogni tale partizione P individua una poligonale, che anche denotiamo con il simbolo P, iscritta nella curva α e di vertici i punti $\alpha(a) = \alpha(t_0), \alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k) = \alpha(b)$. Denotiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme di tali partizioni di $[a, b]$ e dunque delle poligonali iscritte nella curva α. Allora , l'insieme delle lunghezze

$$L(\alpha, P) = \sum_{j=1,\ldots,k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|$$

delle poligonali iscritte ammette un estremo superiore finito, e risulta:

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} L(\alpha, P) = \lim_{\|P\|\to 0} L(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Osservazione

La dimostrazione del precedente Teorema è negli Appunti di Analisi II. Si noti in particolare che per l'invarianza dell'integrale per cambiamento di variabile, la lunghezza di un'arco di curva risulta invariante per riparametrizzazioni.

Una conseguenza importante si ha quando la curva α risulta regolare, ovvero quando per ogni t risulta $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ e dunque $\|\alpha'(t)\| > 0$. Si può infatti in tale caso definire per la curva α un parametro naturale, s detto di *lunghezza d'arco*, o *ascissa curvilinea*, mediante una funzione integrale:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

da cui naturalmente $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. La funzione è dunque invertibile, e la riparametrizzazione con l'inversa $t = t(s)$ fornisce la nostra curva $\alpha(t(s))$ con parametro l'ascissa curvilinea s.

Una spirale logaritmica

A titolo di esempio, eseguiamo la riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea per la seguente spirale logaritmica:

$$\alpha(t): \quad x(t) = e^{-t}\cos t, \quad y(t) = e^{-t}\sin t, \quad z(t) \equiv 0,$$

dove $t \in \mathbb{R}$. Si tratta dunque di una curva piana (del piano xy), della famiglia di spirali di Descartes $\alpha_{a,b}(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t, 0)$ di cui parla il Prof. Arezzo nelle lezioni-video.

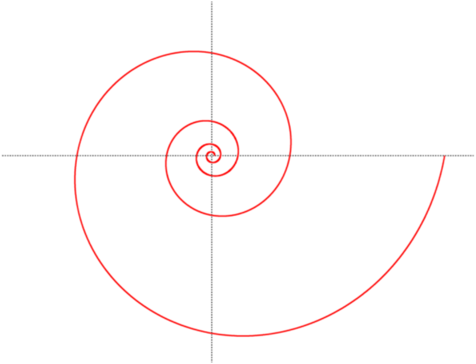

Figura 1, da Wiki Commons

Riparametrizzazione regolare

Per passare all'ascissa curvilinea, calcoliamo il vettore tangente:

$$\alpha'(t) = (-e^{-t}(\cos t + \sin t), -e^{-t}(\sin t - \cos t), 0).$$

Ne segue $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}e^{-t}$ e, scegliendo $t_0 = 0$, otteniamo l'ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}e^{-\tau}d\tau = \sqrt{2}\big[-e^{-\tau}\big]_0^t = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Dunque $1 - e^{-t} = \frac{s}{\sqrt{2}}$, da cui la funzione inversa

$$t = -\log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right),$$

definita per $s \in (-\infty, \sqrt{2})$.

Ecco dunque la riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea $s \in (-\infty, \sqrt{2})$:

$$x(s) = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad y(s) = -\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\sin\log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad z(s) \equiv 0.$$

Un calcolo

Possiamo anche calcolare la lunghezza di archi di curva sulla spirale logaritmica. Per esempio, guardando la figura 1, dell'arco C di spirale che, partendo dal punto $(1,0)$ del piano, corrispondente ai valori $t = s = 0$ si avvolge infinite volte verso l'origine (che non raggiunge). La lunghezza di quest'arco sarà finita o infinita? Calcoliamo, naturalmente con un integrale improprio:

$$L(C) = \int_0^{+\infty} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-t} dt = \sqrt{2}\big[-e^{-t}\big]_0^{+\infty} = \sqrt{2},$$

che naturalmente ritroviamo usando come parametro l'ascissa curvilinea:

$$L(C) = \int_0^{\sqrt{2}} \|\dot{\alpha}(s)\| ds = \int_0^{\sqrt{2}} ds = \sqrt{2},$$

dove, come faremo d'ora in avanti, usiamo la notazione $\dot{f} = \frac{df}{ds}$ per la derivata di una funzione f rispetto all'ascissa curvilinea s.

Si noti che nelle due parametrizzazioni usate per la spirale risulta:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2} e^{-t}, \qquad \|\dot{\alpha}(s)\| \equiv 1.$$

$y = f(x)$

Per le curve piane, contenute in $\mathbb{R}^2$, sono spesso utili le seguenti altre rappresentazioni analitiche.

Grafico di funzione $y = f(x)$

Assumiamo come al solito f differenziabile. Questa rappresentazione può essere vista come parametrica del tipo

$$x = t, \quad y = f(t),$$

e si noti che la condizione di regolarità è automaticamente verificata: $x'(t) \equiv 1 \neq 0$. Da quanto visto in una delle prime slides, la retta tangente in $P_0 = (x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ ha quindi equazioni parametriche $x = x_0 + t$, $y = y_0 + f'(x_0)t$, e dunque ha equazione cartesiana

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

$F(x, y) = 0$

Rappresentazione cartesiana $F(x, y) = 0$

Sempre con $F(x, y)$ differenziabile. Utile p. es. per le curve algebriche, ovvero quando $F(x, y)$ è un polinomio. La condizione di regolarità deve essere richiesta, assumendo che se $P_0 = (x_0, y_0)$ è tale che $F(x_0, y_0) = 0$, una almeno tra $F_x(x_0, y_0)$ e $F_y(x_0, y_0)$ sia non nulla. Allora, se p. es. è $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite esiste una funzione differenziable $\quad f : I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R} \quad$ tale che nell'intervallo I sia

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Dunque per derivazione totale rispetto a x, sempre identicamente su I risulta $F_x + F_y f' \equiv 0$. Ne segue $f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$, e pertanto riconducendosi al caso del grafico di una funzione, la retta tangente in $P_0 = (x_0, y_0)$ alla curva $F(x, y) = 0$ ha ora equazione cartesiana

$$\boxed{F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) = 0}$$

Una circonferenza linearmente sollevata ...

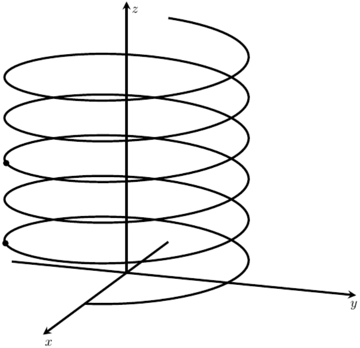

Figura 2

Equazioni parametriche elica

$$\alpha(t): \qquad x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = bt \qquad (r > 0,\ b \in \mathbb{R})$$

Riparametrizzazione naturale

Per passare all'ascissa curvilinea, calcoliamo il vettore tangente:

$$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t, b).$$

Ne segue $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2+b^2}$ e, scegliendo $t_0 = 0$, otteniamo l'ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2+b^2}\, d\tau = \left(\sqrt{r^2+b^2}\right) t.$$

Dunque il cambiamento di variabile è $\quad t = \frac{s}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad$ definito per $s \in \mathbb{R}$.

Ecco dunque la riparametrizzazione dell'elica con l'ascissa curvilinea $s \in \mathbb{R}$:

$$x(s) = r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad y(s) = \sin\frac{s}{\sqrt{r^2+b^2}}, \quad z(s) = b\,\frac{s}{\sqrt{r^2+b^2}}.$$

Osservazione: per l'elica abbiamo $\quad \|\alpha'(t)\| \equiv \sqrt{r^2+b^2} \quad$ e $\quad \|\dot\alpha(s)\| \equiv 1.$

Verso la curvatura

Abbiamo osservato che per entrambe spirale logaritmica e elica risulta $\|\dot{\alpha}(s)\| \equiv 1$, ovvero il vettore tangente per l'ascissa curvilinea è un versore.

Questo è un fatto generale, e benché la dimostrazione sia immediata, esso costituisce un importante

Teorema. Sia $\alpha(t)$ una curva regolare di $\mathbb{R}$. Allora il parametro t è un'ascissa curvilinea se e solo se risulta $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$.

Dimostrazione. Sia t un parametro arbitrario e ricordiamo la definizione di ascissa curvilinea $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| d\tau$. Dunque $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$. Pertanto $s'(t) \equiv 1$ se e solo se $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$.

Nel prossimo file parleremo di **curvatura** di una curva differenziabile α, intuitivamente "velocità di variazione della sua retta tangente".
Si comprende dunque quanto sia utile l'ascissa curvilinea per parlare di curvatura: il relativo vettore tangente è ovunque un versore:
$\mathbf{t} = \dot{\alpha}(s) \Leftrightarrow \|\mathbf{t}\| \equiv 1,$ e dunque $\mathbf{t}$ varia solo in direzione.
La sua velocità di variazione è quindi la stessa di quella della retta tangente, ovvero definiremo la curvatura di α come

$$\boxed{k(s) = \|\dot{\mathbf{t}}\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\|}$$